# К истории современной формулы Ньютона-Лейбница

(некоторые материалы)

Вместо предисловия.

Чтение лекций по математическому анализу на механико-математическом факультете МГУ стимулировало меня попытаться проследить научную историю возникновения современной формулы Ньютона-Лейбница, именуемой обычно общей формулой Стокса.

Непосредственным толчком к реализации желания разобраться в истории вопроса было для меня следующее стечение обстоятельств. Я насквозь прочитал статьи в Notices, посвященные памяти скончавшегося 3 июня 2010 года Владимира Игоревича Арнольда.

Notices of the American Mathematical Society
Volume 59, number 3, March 2012; number 4, April 2012.

В статье Дмитрия Фукса (во втором из указанных номеров Notices) я обратил внимание на шутливое замечание о том, что Фукс сообщил Арнольду кое-что из истории математики, чего Арнольд всё же не знал, а именно, что современную общую формулу Стокса впервые написал Гурса. Будучи знаком со студенческих лет и с Димой Арнольдом, и с моим однокурсником Митей Фуксом, я тут же написал Мите, сознавшись, что для меня это тоже новость, и просил Митю прислать мне ссылку, чтобы удостовериться во всём своими глазами. К сожалению, ссылка оказалась не на первоисточник, а на популярный, хотя довольно объёмный и полный учебник истории математики

Victor J. Katz,
A History of Mathematics
Addison Wesley, 1998.

(По Кацу общая формула Стокса в её современном облике впервые написана в 1917 году Гурса; см. стр. 796-797 книги Каца.)

После этого я и решил при случае посидеть в подходящих библиотеках, покопаться в оригинальных работах и постараться получить более или менее правильное представление о развитии идей, последовательности имён и событий. По указанной выше причине начал с Гурса, хотя было ясно, что дело всё равно сведётся к таким именам как Эли Картан и Анри Пуанкаре (их работы надо посмотреть тщательнее, чтобы картина прояснилась максимально).

Приводимая ниже информация — конспект того, что мне удалось (правда, второпях) собрать, посидев в августе 2012 года в библиотеках IHES (Bures-sur-Ivette, France) и университета Université de Paris-Sud (Orsay, France).

В весеннем семестре 2015 года меня попросили сделать доклад на семинаре кафедры математического анализа. Этот доклад был сделан. Вот его название и аннотация.

### Современная формула Ньютона-Лейбница и единство математики

В.А.Зорич

С высоты и в темпе птичьего полёта будет прослежен путь от классики (*Newton-Leibniz-Green-Gauss-Остроградский-Maxwell-Stokes*) к современной формуле Ньютона-Лейбница (*Pfaff, Natani, Clebsh, Lie, Frobenius, Grassman, Darboux, Volterra, Élie Cartan, Poincaré, Goursat, Kähler, de Rham*).

Основой доклада послужили упомянутые записи, которые не доведены до состояния связной статьи. Они, тем не менее, содержат когда-то собранный и отчасти систематизированный материал, который может быть полезен тому, кто захочет профессионально описать историю вопроса. Учитывая это, я приведу их здесь с точными указаниями соответствующей библиографии.

Готовясь к докладу, я просмотрел эти записи и прочитал ещё кое-что, относящееся к обсуждаемому вопросу. Точные ссылки на это "кое-что" тоже будут даны ниже.

К истории современной формулы Ньютона-Лейбница

29 августа 2012

**1.** Классика: *Барроу, Ньютон, Лейбниц, Грин, Гаусс, Остроградский, Стокс, Максвелл.*

Эти имена и их отношение к формуле присутствуют и описаны практически в каждом учебнике истории математики, точнее, истории математического анализа (calculus). Последние два имени особо обсуждаются, например, Спиваком в его коротенькой книжке, посвященной интегрированию дифференциальных форм.

Calculus on Manifolds
A modern approach to Classical Theorems of Advanced Calculus
Michael Spivak
Brandeis University
W.A.Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1965.

Перевод на русский язык:

М.Спивак
Математический анализ на многообразиях.
Мир, Москва, 1971.

**2.** Движение к современности: *Pfaff, Natani, Clebsh, Lie, Frobenius, Grassman, Darboux, Élie Cartan, Poincaré, Goursat, Kähler, de Rham.*

*Eduard Goursat*,
Leçons sur le Problème de Pfaff.
Paris, Librairie Scientifique J.Hermann, 1922.

На стр. 110 формулировка (петитом) общей формулы Стокса (с обозначением $\omega'$ вместо появившегося позднее (1934 Kähler) обозначения $d\omega$. За доказательством Гурса отсылает к работам Пуанкаре:

*H. Poincaré*,
a) Les Methodes nouvelles de la Mécanique céleste (tome III);
(Оригиналы томов 1, 2, 3 появились соответственно в 1892, 93 и 99 годах.)
b) Sur les résidus des intégrales doubles (Acta Mathematica, tome IX);
c) Analysis situs (Journal de l'École Polytechnique, 1895.)

Нашёл на стеллаже и пролистал третий том
Les Methodes nouvelles de la Mécanique céleste (tome III);
Dover Publications, INC, New York (переиздание 1957 года; похоже, что это копия французского оригинала с сохранением текста и страниц).

На стр. 43 интегральный инвариант гамильтоновой системы, а на стр. 10 по поводу доказательства общей формулы Стокса (которая там, конечно, так не называется) Пуанкаре отсылает к следующим двум своим работам:
Mémoire sur les residus des intégrales doubles (1887)
и
Mémoire du Cahier du Centenaire du Journal de l'École Polytechnique.

Эти работы можно найти в полном собрании сочинений Анри Пуанкаре.

В упомянутой книге Goursat «Leçons sur le Problème de Pfaff»

Chapitres III
Formes symboliques de differéntielles.

Гурса в конце этого названия главы делает следующую сноску:

Auteurs á consulter:

*É.Cartan*,
Sur certaines expression différentialles et le problème de Pfaff.
Annales de l'École Normale, $3^e$ serie, t. XVI, 1899.

*E.Goursat*,
Sur certaines systm̀es d'équations aux differentialles totales et sur une generalization du problème de Pfaff.
Annales de la Faculté des Scinces de Toulouse, t. VII, 1915.

*Burali-Forti*,
Introduction à la géométrie suivant la méthode de Grassmann.
Gauthier-Villars, 1898.

Работы (книги) Эли Картана, связанные с рассматриваемым предметом.

*Élie Cartan*,
Leçons sur les invariants integraux.
Paris, Hermann, 1922.

[Русский перевод:
Э.Картан
Интегральные инварианты.
Гостехиздат, М. — л., 1940.]

Geometry of Riemannian Spaces (by Elie Cartan).
Math. Sci. Press

На стр. 197 ссылка самого Э.Картана на внешние дифференциальные формы (которые, кстати, он и его ближайшие последователи изначально именовали *formes symboliques de differéntielles*).

На стр. 201 отмечено (примечанием редактора), что обозначение $d\omega$ вместо использовавшегося самим Э.Картаном и его последователями обозначения $\omega'$ для производной формы (дифференциала формы) ввёл в 1934 году Kähler.

[Оригинал:
Leçons sur la geométrie des espaces de Riemann.
2-éme ed.
Paris, Gauthier-Villars, 1946.

Имеется русский перевод:

Э.Картан
Геометрия римановых пространств.
ОНТИ, М. — л., 1936.]

Les systèmes diffŕentiells extérieures et leurs applications géometriques.
Hermann, Paris, 1971.
(Le premiére édition de cet ouvrage a paru en novembre 1945 dan la collection Actualités scientifiques et industrielles , n. 994.)

(Пока ещё обозначение [ , ] для внешнего произведения. Ссылка на то, что термин *замкнутая форма* ввёл de Rham, см. стр. 40. Там же формула $\int \omega = \int d\omega$ и идея обобщённого дифференциала.)

Notice sur les travaux scientifiques.
Collection «Discours de La Methode» dirigée par Boris Rybak.
Gauthier-Villars Éditeur
Paris/Bruxells/Montréal, 1974.

(На стр. 39 комментарий к внешним формам со ссылкой на влияние со стороны
calcul extérieur de Grassmann
и
covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff dont la notion est due à Frobenius et à Darboux.

Вообще это очень содержательный, ценный и поучительный обзор самого Эли Картана своего математического творчества, с указанием истоков, влияний и развития идей.)

Кстати, теорема Фробениуса об условиях интегрируемости системы уравнений Пфаффа (или интегрируемости распределений) на современном языке описаны в книге Анри Картана — сына Эли Картана

H.Cartan,
Calcul Différentiel
Formes Différentielles.
Hermann, Paris, 1967.

Перевод на русский язык

А.Картан,
Дифференциальное исчисление
Дифференциальные формы.
Издательство Мир, Москва, 1971.

В связи с теорией дифференциальных форм и её топологическими приложениями (когомологиями, открытыми в 1934 независимо Дж.Александером и А.Н.Колмогоровым) укажем на книгу де Рама, содержащую полезную библиографию, в частности, ссылки на работы самого автора, относящиеся к развитию теории и техники дифференциальных форм.

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES
Formes, Courants, Formes harmoniques
Par GEORGES DE RHAM
Professeur aux Universités de Genève et de Lausanne
Paris, Hermann, 1955.

Имеется в русском переводе:

Ж. де РАМ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ
Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1956.

Думаю, что несколько более внимательный просмотр хотя бы уже перечисленных источников позволит с достаточной определённостью ответить на следующие вопросы.

a) Истоки терии дифференциальных форм (не считая Лейбница, — исследование уравнения Пфаффа).

Условия интегрируемости (теорема Фробениуса). Обобщение задачи на системы уравнений Пфаффа и обобщение теоремы Фробениуса.

Интегральные инварианты Пуанкаре в гамильтоновой механике.

b) Эволюция терминологии (символические формы — дифференциальные формы), символики ($\omega' - d\omega$, $[,] - \wedge$), идеологии (замкнутые и точные формы, когомологии). Обобщенные дифференциальные формы (потоки).

c) Современный вид и понимание формулы Ньютона-Лейбница.

**************************************************

Ниже помещёно полученное от Дмитрия Борисовича Фукса сканирование фрагмента упомянутой выше книги Каца, где говорится об общей формуле Стокса.

Хорошо бы также найти в оригинале обсуждение (постановку) Эйлером формулы замены переменной в кратном интеграле и общую формулу Стокса у Вольтерра, о чём вскользь говорит здесь Кац.

**************************************************

### Дополнения, сделанные при подготовке доклада

*Дополнение* 22.01.2015

В тексте Полищука о Вольтерра (Е.М.Полищук (Ленинград). Вито Вольтерра. Историко-математические исследования, выпуск XXI, Москва, Наука, 1976; 183-213) на стр. 191 наверху упоминание о работах Вольтерра, цитируемых в (14) Схоутеном. Они касаются исчисления кососимметрических тензоров. (14) *J.A.Schouten.* Der Ricci-Kalcul. Berlin, 1924.

В книге Схоутена литература приведена идеально педантично!

В частности, там на стр. 116 имеются три ссылки:

*Poincaré, H.*: Sur les résidus des integrales double. Acta mathematica 1887, Bd. 9, S. 321-380.

(Схоутен цитирует эту работу на предмет условий точности форм, но именно в этой работе по ходу появляется общая интегральная формула Ньютона-Лейбница, конечно, без какого-либо специального названия и в совсем иных обозначениях.)

*Volterra, V.*: Sulle funzioni conjugate. Rendiconti Accad. Lincei 1889, (IV) Bd. 51, S. 599-611.

*Goursat, E.*: Leçons sur le Problème de Pfaff. Paris: J.Herman. 1922. 386 S.

*Дополнение* 23.01.2015

*Samelson, H.*: Differential forms, the Early Days; or the Stories of Deahna's Theorem and Volterra's Theorem. The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 6 (Jun.-Jul. 2001), pp. 522-530.

*Volterra, V.*: Delle variabili complesse negli iperspazii. Rendiconti Accad. dei Lincei ser. IV vol 51 (1889), Nota I, pp. 158-165, Nota II, pp. 291-299.

*Volterra, V.*: Sulle funzione conjugate. [??Rendiconti Accad. dei Lincei ser. IV vol 51 (1889), Nota I, pp. 158-169, Nota II, pp. 291-299??]. Atti della Reale Accademia dei Lincei (4), 5, 599-611 (1889).

*Vito Volterra.*: Opere Matematiche, Accad. Nazion. dei Lincei, Roma (1954), vol. 1, pp. 403-410, 411-419, 420-432.

Никто не занимался общей формулой Стокса самой по себе. Как это часто бывает, открытие было сделано в качестве побочного продукта других исследований.

Вопрос о полном дифференциале; приведение формы к нормальному виду; решение уравнения Пфаффа, обобщение постановки — система уравнений Пфаффа; обобщение — многомерные формы; Грассманова алгебра и кососимметрические формы; замена переменных и якобиан; интеграл от формы и замена переменных в интеграле; интегрируемость формы — условия точности; сначала не заметили, что необходимое условие локально и не всегда достаточно (1922 Э.Картан, Гурса; Э.Картан заметил на примере формы на сфере и пошла топология).

Пуанкаре интересовался многомерным обобщением комплексного анализа и теоремы Коши о вычетах, а также интегральными инвариантами в гамильтоновой механике. Использовал кососимметрические формы и по ходу дела общую формулу Стокса, которую доказал (1887) тоже по ходу дела.

Вито Вольтерра, движимый теорией электромагнетизма, тоже обобщал комплексный анализ через понятия сопряженных гармонических функций и функций кривых (функционалов). В своих терминах ввёл всю кухню форм, их интегралов, дифференциалов, сопряженных форм, теорию Ходжа, общую формулу Стокса.

Об этом пишет Samelson, ссылаясь на де Рама, который развил теорию интегрирования дифференциальных форм с фундаментальными топологическими применениями (когомологии де Рама). Samelson пишет, что рецензентом диссертации де Рама был Эли Картан, хотя диссертант посвятил её Лебегу (считая последнего учителем?).

Вольтерра (ученик Дини и Бетте), судя по разнообразию естественнонаучных интересов и результатов, был могучим интеллектом, в этом плане сродни Пуанкаре.

*Дополнение* 24.01.2015

Де Рам (*Ж. де Рам*, Дифференцируемые многообразия. Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1956) в сноске на странице 59 по поводу доказанной общей формулу Стокса пишет: Эта формула содержит в качестве частных случаев классические теоремы Грина, Ампера-Стокса и Остроградского. Общий случай рассматривали Вольтерра, Пуанкаре и Брауэр (см. Volterra [1], Poincaré [1], Brower [1]. Ср. Segre [1], стр. 202).

[1] *Volterra V.* Delle variabili complesse negli iperspazi, Atti della Reale Accademia dei Lincei (4), 5, 158-165, 291-299 (1889).

[2] *Volterra V.* Sulle funzioni conjugate. Atti della Reale Accademia dei Lincei (4), 5, 599-611 (1889).

[1] *Poincaré H.* Analysis situs, Journ. de l'École polytechnique, Paris (2), **1**, 1-121 (1895).

[2] *Poincaré H.* Complément à l'Analysis situs, Rund. del Gircolo mat. di Palermo, **13**, 285-343 (1899).

[1] *Brouwer L.E.J.* Polydimensional vector distributions, Proc. of the Royal Acad. of Sciences, Amsterdam, **9**, 66-78 (1906).

[1] *Segre B.* Form differebziali e loro integrali. Vol. I. Docet, edizioni universitare, Roma 1951.

applied to many new areas of mathematics, including the theory of differential forms and the theory of vector spaces.

### 17.4.2 Vector Spaces

The basic notions of linear algebra, including those of linear independence and linear combinations, were used in many parts of mathematics during the nineteenth century, but it was not until the end of the century that an abstract definition of a vector space was formulated. The first mathematician to give such a definition was Giuseppe Peano in his *Calcolo geometrico* of 1888. Peano's aim in the book, as the title indicates, was the same as Grassmann's, namely to develop a geometric calculus. Thus much of the book consists of various calculations dealing with points, lines, planes, and solid figures. But in chapter IX Peano gave a definition of what he called a **linear system**. Such a system consists of quantities provided with operations of addition and scalar multiplication. The addition must satisfy the commutative and associative laws (although these laws were not named by Peano), while the scalar multiplication satisfies two distributive laws, an associative law, and the law that $1v = v$ for every quantity $v$. In addition, Peano included as part of his axiom system the existence of a zero quantity satisfying $v + 0 = v$ for any $v$ as well as $v + (-1)v = 0$. Peano also defined the **dimension** of a linear system as the maximum number of linearly independent quantities in the system. In connection with this idea, Peano noted that the set of polynomial functions in one variable forms a linear system, but that there is no such maximum number of linearly independent quantities and therefore the dimension of this system must be infinite.

Peano's work, like that of Grassmann, had no immediate effect on the mathematical world. His definition was forgotten, although mathematicians continued to use the basic concepts involved. For example, Dedekind in 1893, as part of his work on algebraic number fields, defined a space $\Omega$ as the set of all linear combinations of an independent set of $n$ algebraic numbers with coefficients in a field. He noted that the numbers of this space satisfy the basic properties we attribute to a vector space, without referring to any such definition elsewhere. And he proved, using induction, the important result that any $n + 1$ numbers in $\Omega$ are dependent. Although he did not state explicitly that no smaller set of generators would determine the space, his definition essentially assured this and thus he had shown that the dimension of a (finite-dimensional) vector space is well defined.[21]

Aspects of vector space theory continued to appear in the mathematical literature, but it was not until the twentieth century that a fully axiomatic treatment of the subject entered the mathematical mainstream.

### 17.4.3 Differential Forms

Grassmann's exterior multiplication found one of its most important applications in the development of the theory of differential forms by Elie Cartan (1869–1951). Naturally, differential forms, the "things under the integral sign," had been extensively used throughout the nineteenth century, particularly in line integrals, surface integrals, and volume integrals. But there was no attempt to define the forms themselves, only the integrals. Cartan, having read Grassmann's work, decided in the late 1890s that one could define differential forms in an $n$-dimensional space by taking for the system of units the differentials $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots$. The multiplication of these units would be Grassmann's combinatory multiplication, while the coefficients of the units would be differentiable functions in the space. Thus a one-form in two dimensions was an expression of the form $A(x, y)\,dx + B(x, y)\,dy$, a two-form in three dimensions would have the form $A(x, y, z)\,dx\,dy + B(x, y, z)\,dy\,dz + C(x, y, z)\,dz\,dx$, and multiplication would follow the rule $dx_i\,dx_j = -dx_j\,dx_i$ and therefore $dx_i\,dx_i = 0$.

Cartan realized, of course, that this combinatory multiplication would solve Euler's problem of finding a formal way of determining the change of variable formula. For if $u = u(x, y)$ and $v = v(x, y)$ are functions defining the change from variables $x$, $y$ to $u$, $v$, then $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$ and the product $du\,dv$ is given by

$$\begin{aligned} du\,dv &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx\,dy + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}dy\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dy\,dy \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}dx\,dy \end{aligned}$$

as desired.

Besides developing the algebra of differential forms, Cartan also developed their calculus. Namely, in 1899 he defined the derived expression (now called the **exterior derivative**) of a one-form $\omega = \sum A_i\,dx_i$ to be the two-form $d\omega = \sum dA_i\,dx_i$. For example, the derived expression of the form $A\,dx + B\,dy$ is the form

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy\right)dy = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Note that this derived expression appears in the statement of Green's theorem, while the exterior derivative of the one-form $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ appears in the statement of Stokes' theorem. In 1901, Cartan generalized his definition of the exterior derivative to forms of any degree. Namely, if $\omega = \sum a_{ij\cdots k}dx_i\,dx_j \cdots dx_k$, then the exterior derivative $d\omega$ is defined to be $\sum da_{ij\cdots k}\,dx_i\,dx_j \cdots dx_k$. It is straightforward to show then that the exterior derivative of the two-form $A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$ is the three-form

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

the expression that shows up in the divergence theorem.

Although Cartan realized that these three theorems of vector calculus could be easily stated using differential forms, it was Edouard Goursat (1858–1936) in 1917 who first noted that Volterra's generalization of these theorems, today called the generalized Stokes' theorem, could be written in the simple form

$$\int_S \omega = \int_T d\omega,$$

where $\omega$ is a $p$-form in $n$-space, and $S$ is the $p$-dimensional boundary of the $(p + 1)$-dimensional region $T$. Goursat also used differential forms to state and prove the Poincaré lemma and its converse, namely that if $\omega$ is a $p$-form, then $d\omega = 0$ if and only if there is a $(p - 1)$-form $\eta$ with $\omega = d\eta$. Goursat did not notice, however, that the "only if" part of the result depends on the domain of $\omega$ and is not true in general. Cartan himself in 1922 gave a counterexample, which provided one of the impulses in the next decade for the development of the differential cohomology of differentiable manifolds.[22]